

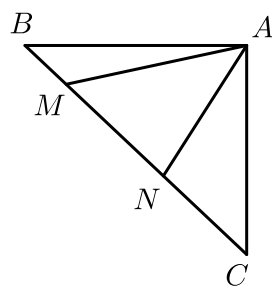
第2讲 旋转基本模型加油站

一、角含半角模型

练习1

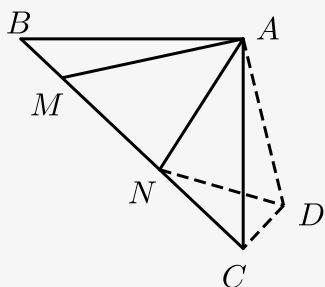
1. 2019~2020学年10月江苏苏州工业园区苏州中学园区校初二上学期月考第16题2分 ★★★

如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 M ， N 在边 BC 上，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，若 $BM = 1$ ， $CN = 3$ ，则 MN 的长是 _____。



【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】 如图，作 $CD \perp BC$ ，使 $CD = BM = 1$ ，连接 AD 、 DN ，



易知 $\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ， $AB = AC$ ，

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} BM = CD \\ \angle ABM = \angle ACD = 45^\circ \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACD$ (SAS)，

$\therefore AM = AD$ ， $\angle CAD = \angle BAM$ ，

$\therefore \angle DAN = \angle CAD + \angle CAN = \angle BAM + \angle CAN = 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ$ ，

在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle DAN$ 中，

$$\begin{cases} AM = AD \\ \angle MAN = \angle DAN = 45^\circ \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle DAN$ (SAS)，

$$\therefore MN = DN,$$

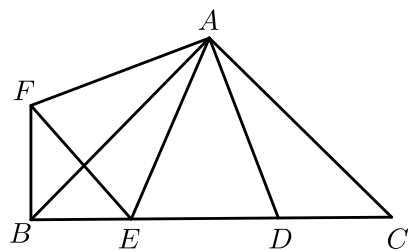
$$\text{在 Rt}\triangle CDN \text{中}, DN = \sqrt{CN^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore MN = \sqrt{10}.$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

2. 2020~2021学年浙江绍兴嵊州市谷来中学初二上学期期中第10题2分 ★★★

如图, $\angle BAC = \angle DAF = 90^\circ$, $AB = AC$, $AD = AF$, 点 D, E 为 BC 边上的两点, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 连接 EF, BF , 则下列结论: ① $\triangle AFB \cong \triangle ADC$; ② $\triangle ABD$ 为等腰三角形; ③ $\angle ADC = 120^\circ$; ④ $BE^2 + DC^2 = DE^2$, 其中正确的有 () 个.



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 C

【解析】 ① $\because \angle BAC = \angle DAF = 90^\circ$, $AB = AC$,

$$\therefore \angle BAF = \angle CAD, \angle ABC = \angle C = 45^\circ,$$

在 $\triangle AFB$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAF = \angle CAD, \\ AF = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle ADC$ (SAS), 故①正确.

② $\because \angle BDA = \angle C + \angle CAD = 45^\circ + \angle CAD$, $\angle BAD = \angle DAE + \angle BAE = 45^\circ + \angle BAE$,
而 $\angle BAE \neq \angle CAD$,

$$\therefore \angle BAD \neq \angle BDA,$$

$\therefore AB \neq DB$, 故②错误.

③ $\because \angle ADC = \angle ABC + \angle BAD = 45^\circ + 45^\circ + \angle BAE = 90^\circ + \angle BAE \neq 120^\circ$, 故③错误.

④ 由①知 $\triangle AFB \cong \triangle ADC$,

$$\therefore \angle ABF = \angle C = 45^\circ, BF = DC.$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ABC + \angle ABF = 90^\circ.$$

$$\because \angle DAF = 90^\circ, \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle DAF - \angle DAE = 45^\circ.$$

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AEF$ 中,

$$\begin{cases} AD = AF \\ \angle DAE = \angle FAE = 45^\circ, \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AEF$ (SAS),

$\therefore DE = EF$,

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, 由勾股定理得: $BE^2 + BF^2 = EF^2$.

$\therefore BF = DC$, $EF = DE$,

$\therefore BE^2 + DC^2 = DE^2$, 故④正确.

正确的结论有①④.

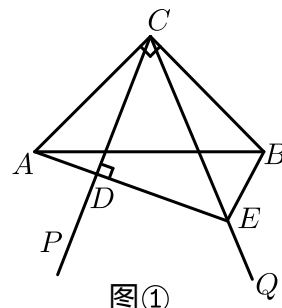
故选 C.

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

3. 2020~2021学年江西南昌红谷滩新区南昌市二中（新校区）初二上学期期中第22题9分 ★★★

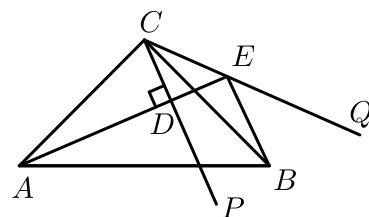
如图：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $\angle PCQ = 45^\circ$ ，把 $\angle PCQ$ 绕点 C 旋转，在整个旋转过程中，过点 A 作 $AD \perp CP$ ，垂足为 D ，直线 AD 交 CQ 于 E 。

(1) 如图①，当 $\angle PCQ$ 在 $\angle ACB$ 内部时，求证： $AD + BE = DE$ 。



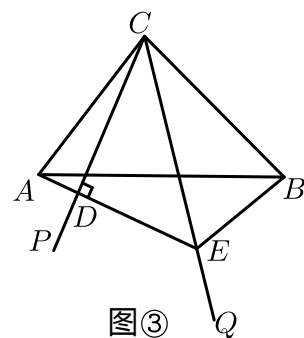
图①

(2) 如图②，当 CQ 在 $\angle ACB$ 外部时，则线段 AD 、 BE 与 DE 的关系为 _____。



图②

(3) 在 (1) 的条件下，若 $CD = 12$ ， $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$ ，求 AE 的长。



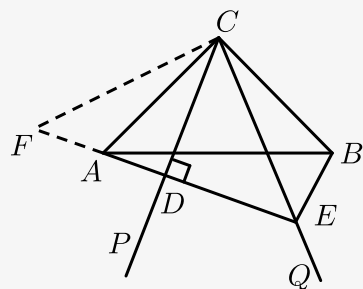
图③

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $AD = BE + DE$

(3) 16.

【解析】(1) 如图①, 延长 DA 到 F , 使 $DF = DE$,



图①

$\because CD \perp AE$,

$\therefore CE = CF$,

$\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle ACF = \angle DCF = 45^\circ$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle PCQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACF = \angle BCE$,

$\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE \\ AC = BC \end{cases}$$

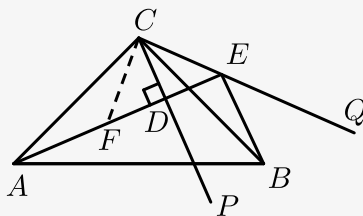
$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE$ (SAS),

$\therefore AF = BE$,

$\therefore AD + BE = AD + AF = DF = DE$,

即 $AD + BE = DE$.

(2) 如图②, 在 AD 上截取 $DF = DE$,



图②

$\because CD \perp AE$,

$\therefore CE = CF$,

$\therefore \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle ECF = \angle DCE + \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE + \angle BCF = \angle ECF = 90^\circ$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACF + \angle BCF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACF = \angle BCE$,
 $\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中 ,

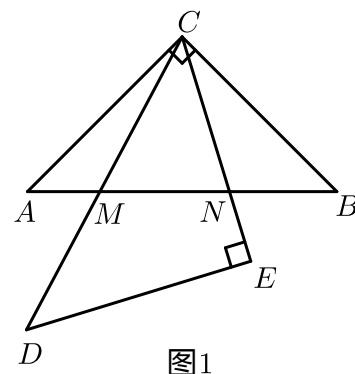
$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle ACF = \angle BCE , \\ AC = BC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCE$ (SAS) ,
 $\therefore AF = BE$,
 $\therefore AD = AF + DF = BE + DE$,
 即 $AD = BE + DE$,
 故答案为 : $AD = BE + DE$.

(3) $\because \angle DCE = \angle DCF = \angle PCQ = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ECF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle ECF$ 是等腰直角三角形 ,
 $\therefore CD = DF = DE = 12$,
 $\because S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACD}$,
 $\therefore AF = 2AD$,
 $\therefore AD = \frac{1}{1+2} \times 12 = 4$,
 $\therefore AE = AD + DE = 4 + 12 = 16$.

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

4. 2020~2021学年山东东营河口区初二上学期期末五四制第25题 ★★★★★

旋转变换在平面几何中有着广泛的应用，特别是在解（证）有关等腰三角形、正三角形、正方形等问题时，更是经常用到的思维方法，请你用旋转变换等知识，解决下面的问题．如图1， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形， DC 与 AB 交于点 M ， CE 与 AB 交于点 N ．



(1) 以点 C 为中心，将 $\triangle ACM$ 逆时针旋转 90° ，画出旋转后的图形，并证明 $AM^2 + BN^2 = MN^2$

(2)

如图2，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 45^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ，若 $BC = 4$ ， $CD = 3$ ，则对角线 AC 的长度为多少？

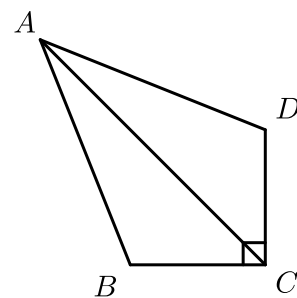


图2

【答案】 (1) 画图见解析，证明见解析。

(2) $6\sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) 旋转后的图形如图1所示：

如图1，连接 $M'N$ ，

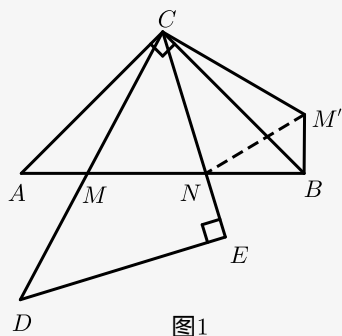


图1

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle CBA = 45^\circ$ ， $\angle ACM + \angle BCN = 45^\circ$ ，

$\because \triangle BCM'$ 是由 $\triangle ACM$ 旋转得到的，

$\therefore \angle BCM' = \angle ACM$ ， $CM = CM'$ ， $AM = BM'$ ， $\angle CBM' = \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle M'CN = \angle MCN = 45^\circ$ ， $\angle NBM' = 90^\circ$ ，

在 $\triangle MCN$ 与 $\triangle M'CN$ 中，
$$\begin{cases} CM = CM' \\ \angle MCN = \angle M'CN \\ CN = CN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MCN \cong \triangle M'CN$ (SAS)，

$\therefore MN = M'N$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BM'N$ 中，根据勾股定理得： $M'N^2 = BN^2 + BM'^2$ ，

$\therefore MN^2 = AM^2 + BN^2$ 。

(2) 如图2，将 $\triangle ACD$ 顺时针旋转 90° 到 $\triangle AC'D'$ ，连接 BD 、 BD' 、 CC' ，

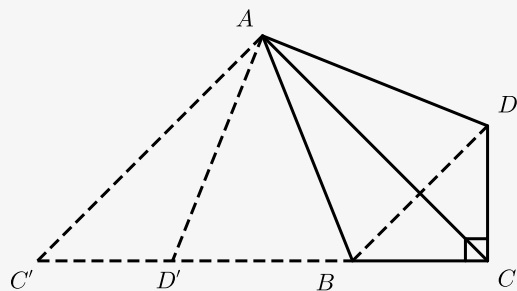


图 2

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$, $\angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$,

由旋转的性质得: $AC' = AC$, $AD' = AD$, $C'D' = CD$,

$\angle CAC' = \angle DAD' = 90^\circ$, $\angle AC'D' = \angle ACD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CAC'$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle AC'C = \angle ACC' = 45^\circ$, $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}CC'$,

$\therefore \angle AC'D' = \angle AC'C = \angle ACC' = \angle ACB$,

$\therefore$ 点 C' , D' , B , C 在同一直线上,

又 $\because \angle BAD = 45^\circ$, $\angle DAD' = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD' = \angle DAD' - \angle BAD = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle BAD'$,

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle D'AB$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD' \\ \angle BAD = \angle BAD' \\ AB = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle D'AB$ (SAS),

$\therefore BD = BD'$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\because BC = 4$, $CD = 3$,

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$,

$\therefore CC' = C'D' + BD' + BC = CD + BD + BC = 3 + 5 + 4 = 12$,

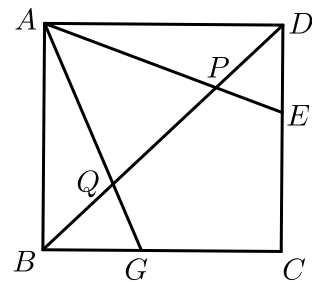
$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2}CC' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12 = 6\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

练习2

5. 2017~2018学年天津河东区初二下学期期中第18题3分 ★★★★★

如图, 点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点, 连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q , 若 $\angle EAG = 45^\circ$, $BQ = 4$, $PD = 3$, 则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____.



【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】 如图，延长 CB 到 F ，使 $BF = DE$ ，连接 AF ，在 AF 上取 $AH = AP$ ，连接 HQ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$ ， $\angle BAD = \angle ADE = \angle ABF = 90^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 和 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABF = \angle ADE \\ BF = DE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ 。

$\therefore \angle GAF = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 = \angle BAD - \angle EAG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAG$ ，

$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle HAQ (\text{SAS})$ ， $\triangle DAP \cong \triangle BAH (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle 6 = \angle 4 = 45^\circ$ ， $BH = PD = 3$ ，

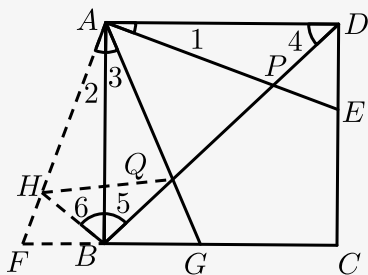
$\therefore \angle QBH = \angle 6 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ$ ，

$\therefore BH^2 + BQ^2 = 3^2 + 4^2 = HQ^2 = PQ^2$ ，

$\therefore PQ = HQ = 5$ ，

$\therefore BD = 12$ ，

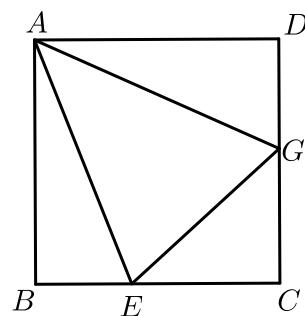
$\therefore AD = AB = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = 6\sqrt{2}$ 。



【标注】 【知识点】 直接用勾股求边长；正方形中的半角模型

6. 2020年山东济南槐荫区初三中考二模第18题4分 ★★★★★

如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是 BC 边上的一点， $BE = 4$ ， $EC = 8$ ，将正方形边 AB 沿 AE 折叠到 AF ，延长 EF 交 DC 于 G 。连接 AG ，现在有如下四个结论：① $\angle EAG = 45^\circ$ ；② $FG = FC$ ；③ $FC \parallel AG$ ；④ $S_{\triangle GFC} = 14$ 。其中结论正确的序号是 _____。



【答案】①③

【解析】由题易知 $AD = AB = AF$ ，则 $\text{Rt}\triangle ADG \cong \text{Rt}\triangle AFG(\text{HL})$ ，

$$\therefore GD = GF, \angle DAG = \angle GAF,$$

$$\text{又} \because \angle FAE = \angle EAB,$$

$$\therefore \angle EAG = \angle GAF + \angle FAE = \frac{1}{2}(\angle BAF + \angle FAD) = \frac{1}{2}\angle BAD = 45^\circ,$$

$\therefore$ ①正确.

$$\text{设 } GF = x, \text{ 则 } GD = GF = x,$$

$$\text{又} \because BE = 4, CE = 8,$$

$$\therefore DC = BC = 12, EF = BE = 4,$$

$$\therefore CG = 12 - x, EG = 4 + x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ECG \text{ 中, 由勾股定理可得 } 8^2 + (12 - x)^2 = (4 + x)^2, \text{ 解得 } x = 6,$$

$$\therefore FG = DG = CG = 6,$$

$$\text{又 } \angle FGC \neq 60^\circ,$$

$\therefore \triangle FGC$ 不是等边三角形,

$\therefore$ ②错误.

如图所示, 连接 DF ,

由①可知 $\triangle AFG$ 和 $\triangle ADG$ 是对称型全等三角形,

则 $FD \perp AG$,

$$\text{又} \because FG = DG = GC,$$

$\therefore \triangle DFC$ 为直角三角形,

$$\therefore FD \perp CF,$$

$$\therefore FC \parallel AG,$$

$\therefore$ ③正确.

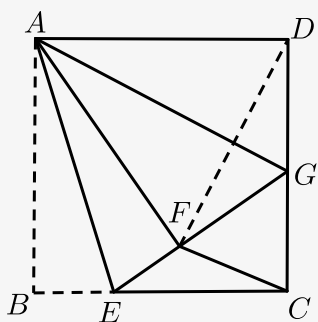
$$\therefore EC = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2}EC \cdot CG = 24,$$

$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle FCG}}{S_{\triangle ECG}} = \frac{FG}{EG} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle FCG} = \frac{3}{5}S_{\triangle ECG} = \frac{72}{5},$$

∴④错误，故正确结论为①③．

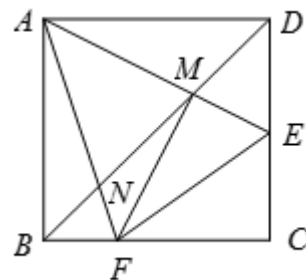


【标注】【知识点】正方形中的半角模型

7. 2017~2018学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第12题3分 ★★

如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 为 CD 、 CB 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， BD 交 AE ， AF 于 M 、 N ，连接 MF 、 EF ，下列结论：

① $MN^2 = BN^2 + DM^2$ ；② $DE + BF = MF + ME$ ；③ $AM = MF$ 且 $AM \perp MF$ ；④ 若 E 为 CD 的中点，则 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$ ，其中正确的有（ ）．



A. 4个

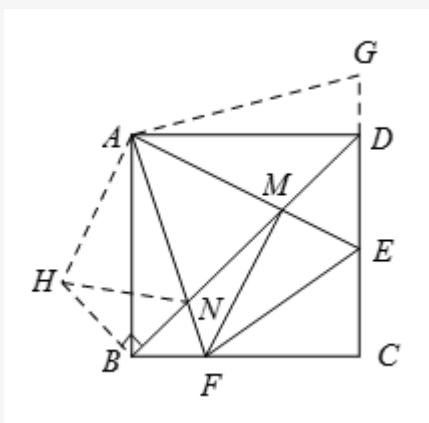
B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】B

【解析】如图，将 $\triangle ABF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，



$\triangle ABF \cong \triangle ADG$ ， $\triangle AEF \cong \triangle AEG$ ， $EF = DE + BF$ ，

将 $\triangle ADM$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABH$ ，

$\triangle ADM \cong \triangle ABH$ ， $\triangle AMN \cong \triangle AHN$ ，

$$\triangle HBN \text{ 为直角三角形, } \angle HBN = 90^\circ, BN^2 + DM^2 = MN^2,$$

$$AM = MF, AM \perp MF, \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

8. 2017~2018学年山东济南长清区初二上学期期末第27题12分 ★★★★★

在学习了等腰三角形的知识后,数学兴趣小组的同学们又进一步对等腰直角三角形的一些特殊线段之间的关系进行了探究.

(1) 【尝试探究】

问题:如图(1),在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$, $\angle DCE = 45^\circ$, 试探究线段 AD 、 DE 、 EB 之间满足的等量关系.

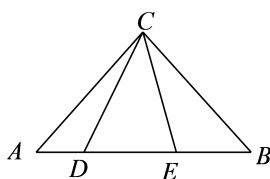
【探究发现】

如图(2),小聪同学作 $\triangle CBF \cong \triangle CAD$, 连接 EF , 由已知条件易得 $\angle EBF =$ _____ 度, $\angle ECF = \angle ECB + \angle BCF = \angle ECB + \angle ACD =$ _____ 度.

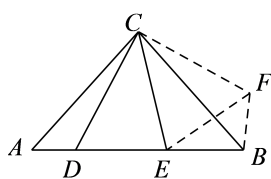
再根据“边角边”,可证 $\triangle CEF \cong$ _____, 得到 $EF =$ _____.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中,根据 _____ 定理,可得到 $BF^2 + BE^2 = EF^2$,

所以 AD 、 DE 、 EB 之间的等量关系是 _____.



图(1)

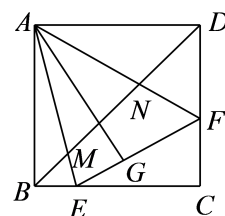


图(2)

(2) 【实践运用】

回答下列问题:

- ① 如图(3),在正方形 $ABCD$ 中, $\triangle AEF$ 的顶点 E 、 F 分别在 BC 、 CD 边上,高 AG 与正方形的边长相等,求 $\angle EAF$ 的度数.



图(3)

- ② 在①的条件下,连接 BD , 分别交 AE 、 AF 于点 M 、 N , 若 $BE = 2$, $CF = 3$, 则正方形的边长为 _____.
- ③ 在②的条件下, $BM = 2\sqrt{2}$, 运用小聪同学探究的结论, 直接写出 MN 的长为 _____.

【答案】(1) 90; 45; $\triangle CED$; DE ; 勾股; $AD^2 + BE^2 = DE^2$

(2) ① 45° .

② 6

③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】(1) 如图1中, 将 $\triangle CAD$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBF$, 连接 EF .

$\because CA = CB, \angle ACB = 90^\circ,$

$\therefore \angle A = \angle CBA = \angle CBH = 45^\circ,$

$\therefore \angle EBF = 90^\circ.$

$\because \angle DCE = 45^\circ,$

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = \angle BCF + \angle BCE = 45^\circ,$

$\therefore \angle ECD = \angle ECF,$

在 $\triangle ECF$ 和 $\triangle ECD$ 中,

$$\begin{cases} EC = EC \\ \angle ECF = \angle ECD, \\ CF = CD \end{cases}$$

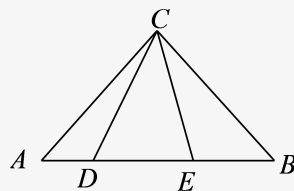
$\therefore \triangle ECF \cong \triangle ECD$ (SAS),

$\therefore DE = EF.$

在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中, $EF^2 = EB^2 + BF^2,$

又 $\because BF = AD, EF = DE,$

$\therefore AD^2 + BE^2 = DE^2,$



图(1)

(2) ① 如图2中,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D = 90^\circ,$

$\because AG \perp EF,$

$\therefore \angle AGE = \angle B = 90^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 和 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE \\ AB = AG \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AEG,$

$\therefore \angle EAB = \angle EAG,$

同理可证 $\text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AFG,$

$\therefore \angle FAD = \angle FAG,$

$\therefore 2\angle EAG + 2\angle FAG = 90^\circ,$

$\therefore \angle EAG + \angle FAG = 45^\circ,$

$\therefore \angle EAF = 45^\circ.$

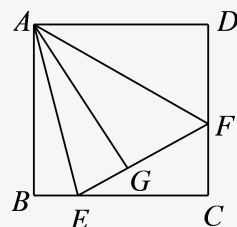


图2

② 如图3中,

旋转 $\triangle ABE$ 到 $\triangle ADH$, 则 $\triangle ABE \cong \triangle ADH$,

$$\therefore DH = BE = 2 ,$$

由探究发现 : $\triangle AEF \cong \triangle AHF$,

$$\therefore FH = EF ,$$

设 $DF = a$,

$$\therefore CD = CF + DF = a + 3 ,$$

$$EF = FH = DF + DH = a + 2 ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore BC = CD = a + 3 ,$$

$$\therefore CE = BC - BE = a + 3 - 2 = a + 1 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中 , 根据勾股定理得 , $(a + 2)^2 = (a + 1)^2 + 3^2$,

$$\therefore a = 3 ,$$

$$\therefore DF = 3 ,$$

$$\therefore CD = 6 .$$

③ 如图 4 , 由 (2) 知 , 正方形 $ABCD$ 的边长为 6 ,

$$\therefore BD = \sqrt{2}CD = 6\sqrt{2} .$$

由 (1) 可知 $\angle MAN = 45^\circ$,

$$\therefore AB = AD , \angle BAD = 90^\circ ,$$

由探究发现得 $BM^2 + DN^2 = MN^2$,

设 $MN = x$,

$$\therefore BD = 6\sqrt{2} , BM = 2\sqrt{2} ,$$

$$\therefore DN = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - x = 4\sqrt{2} - x ,$$

$$\therefore (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2} - x)^2 = x^2 ,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore MN = \frac{5\sqrt{2}}{2} .$$

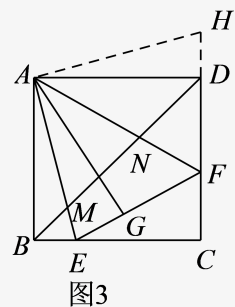


图3

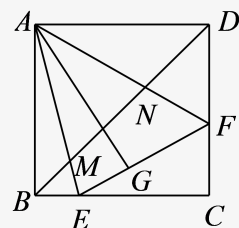


图4

【标注】【知识点】半角模型

9. 2020~2021学年北京西城区宣武外国语学校初二下学期期中第27题 ★★★★★

探究问题 :

(1) 方法感悟 :

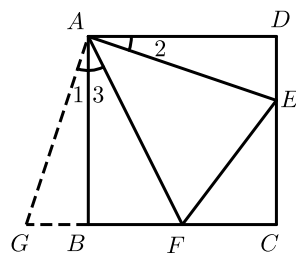
如图① , 在正方形 $ABCD$ 中 , 点 E , F 分别为 DC , BC 边上的点 , 且满足 , 连接 EF ,

$\angle EAF = 45^\circ$, 求证 $DE + BF = EF$.

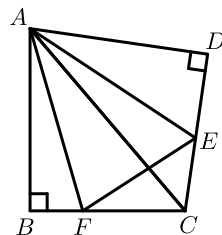
感悟解题方法 , 并完成下列填空 :

将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$,

$\therefore$ DE = EF, 故 $DE + BF = EF$.



$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle DAB$. 试猜想 DE , BF , EF 之间有何数量关系 , 并证明你的猜想 .


$$= \angle BAD - \angle EAF$$

$$= 90^\circ - 45^\circ$$

$$= 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 45^\circ,$$

$$\text{即 } \angle GAF = \angle EAF,$$

$$\therefore \begin{cases} AG = AE \\ \angle GAF = \angle EAF \\ AF = AF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle GAF \cong \triangle EAF (\text{SAS}),$$

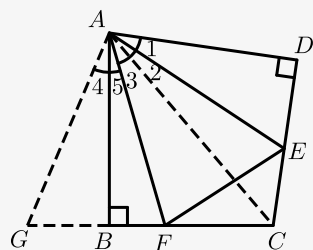
$$\therefore GF = EF,$$

$$\text{故 } DE + BF = EF.$$

故答案为： AEF ； AEF ； GF 。

$$(2) EF = DE + BF;$$

如图，延长 CF ，作 $\angle 4 = \angle 1$ ，



将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 沿斜边翻折得到 $\text{Rt}\triangle ADC$ ，点 E ， F 分别为 DC ， BC 边上的点，且

$$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle DAB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 5, \quad 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle FAE,$$

在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} \angle 4 = \angle 1 \\ AB = AD \\ \angle ABG = \angle ADE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AGB \cong \triangle AED (\text{ASA}),$$

$$\therefore GF = EF,$$

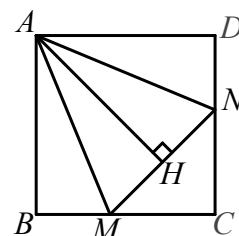
$$\therefore DE + BF = EF.$$

【标注】【知识点】多边形中的半角模型

10. 2018~2019学年3月江苏南通崇川区崇川学校初二下学期月考第27题14分 ★★★★★

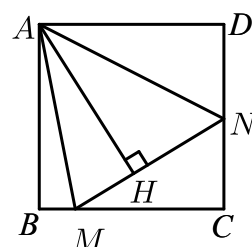
在正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB 、 DC （或它们的延长线）于点 M 、 N ， $AH \perp MN$ 于点 H 。

(1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM = DN$ 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系。



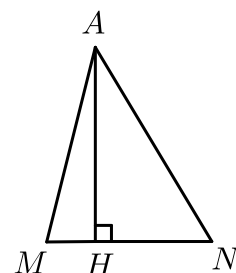
图①

- (2) 如图②, 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时, (1) 中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗? 如果不成立, 请写出理由; 如果成立, 请证明.



图②

- (3) 如图③, 已知 $\angle MAN = 45^\circ$, $AH \perp MN$ 于点 H , 且 $MH = 2$, $NH = 3$, 求 AH 的长. (可用(2)中得到的结论)



图③

【答案】 (1) $AH = AB$.

(2) 数量关系还成立, $AH = AB$, 证明见解析.

(3) 6.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle B = \angle BAD = \angle D = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 和 } \triangle ADN \text{ 中, } \begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D \\ BM = DN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADN (\text{SAS}),$$

$$\therefore AM = AN, \angle BAM = \angle DAN,$$

$$\therefore \triangle AMN \text{ 是等腰三角形,}$$

$$\text{又 } \because AH \perp MN,$$

$$\therefore \angle AHM = 90^\circ, \angle HAM = \angle HAN,$$

$$\therefore \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAM = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ, \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ,$$

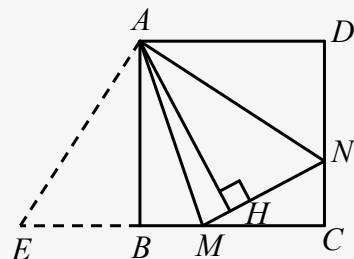
$$\therefore \angle BAM = 22.5^\circ = \angle HAM,$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 和 } \triangle AHM \text{ 中, } \begin{cases} \angle BAM = \angle HAM \\ \angle B = \angle AHM = 90^\circ \\ AM = AM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle AHM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AH = AB.$$

(2) 数量关系还成立, 如图②, 延长 CB 至 E , 使 $BE = DN$, 连接 AE ,



图②

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \angle D = \angle ABE = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 和 Rt}\triangle AND \text{ 中, } \begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADN \\ BE = DN \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEB \cong \text{Rt}\triangle AND \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = AN, \angle EAB = \angle NAD,$$

$$\because \angle MAN = 45^\circ, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM + \angle NAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM + \angle EAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAM = \angle NAM = 45^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AEM \text{ 和 } \triangle ANM \text{ 中, } \begin{cases} AE = AN \\ \angle EAM = \angle NAM \\ AM = AM \end{cases}$$

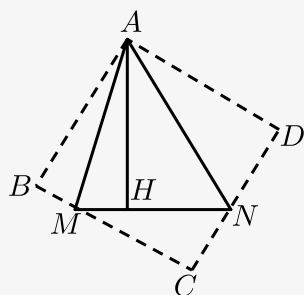
$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore S_{\triangle AEM} = S_{\triangle ANM}, EM = NM,$$

$\because AB$ 、 AH 是 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ANM$ 对应边上的高.

$$\therefore AH = AB.$$

(3) 如图③, 分别沿 AM 、 AN 翻折 $\triangle AMH$ 和 $\triangle ANH$, 得到 $\triangle AMB$ 和 $\triangle AND$,



图③

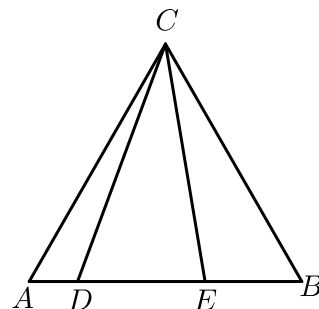
$\therefore BM = 2, DN = 3, \angle B = \angle D = \angle BAD = 90^\circ$,
 分别延长 BM 和 DN 交于点 C , 得到正方形 $ABCD$,
 由 (2) 可知, $AH = AB = BC = CD = AD$,
 设 $AH = x$, 则 $MC = x - 2, NC = x - 3$,
 在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中, 由勾股定理, 得 $MN^2 = MC^2 + NC^2$,
 $\therefore 5^2 = (x - 2)^2 + (x - 3)^2$,
 解得 $x_1 = 6, x_2 = -1$ (不符合题意, 舍去),
 $\therefore AH$ 的长为 6.

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

练习3

11. ★★★

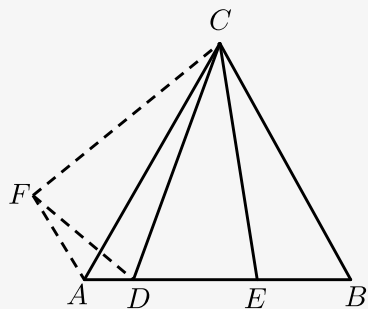
已知：如图，等边三角形 ABC 中，点 D 、 E 在边 AB 上，且 $\angle DCE = 30^\circ$ 。则以线段 ED 、 AD 、 EB 为边长的三角形的形状是（ ）。



- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不确定

【答案】C

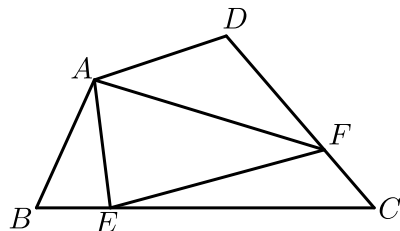
【解析】如下图，将 $\triangle CEB$ 绕点 C 顺时针旋转 60° ，得到 $\triangle ACF$ ，连接 FD 即可得解。



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

12. ★★

如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ． E ， F 分别是线段 BC ， CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ．若 $EF = 11$ ， $BE = 3$ ，则 $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 8

【解析】 延长 CD 至 G 使 $DG = BE$ ，连接 AG ．

$$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \therefore \angle B = \angle ADG,$$

$$\because AB = AD, \therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \text{ (SAS)},$$

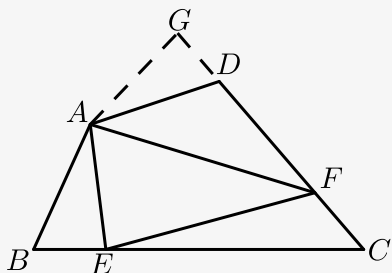
$$\therefore AG = AE, \angle BAE = \angle DAG,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle DAG + \angle EAD = \angle EAG,$$

$$\therefore \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\angle EAG, \therefore \angle EAF = \angle GAF,$$

$$\text{又 } AF = AF, \therefore \triangle EAF \cong \triangle GAF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = GF, \therefore DF = GF - DG = EF - BE = 8.$$



【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

13. 2017~2018学年广东深圳福田区深圳实验学校中学部初一下学期期末第23题7分 ★★★★★

在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp AD$ ， $BC \perp CD$ ， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle MBN = 60^\circ$ ， $\angle MBN$ 绕 B 点旋转，它的两边分别交 AD ， DC （或它们的延长线）于 E ， F ．

（1）当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时（如图1），求证： $\triangle BEF$ 是等边三角形．

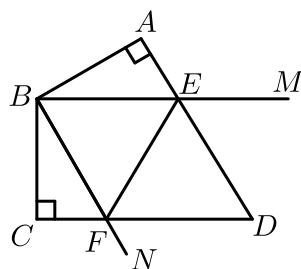


图 1

- (2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时 (如图 2), 线段 AE , CF , EF 之间存在怎样的数量关系? 请证明.

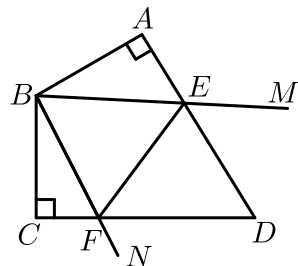


图 2

- (3) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时 (如图 3), 线段 AE , CF , EF 之间存在怎样的数量关系? 请直接写出该数量关系.

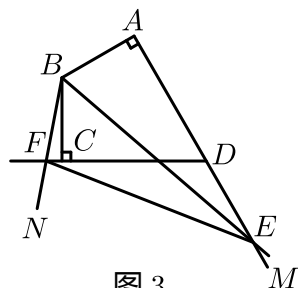


图 3

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $EF = AE + CF$, 证明见解析.

(3) $EF = AE - CF$.

【解析】 (1) 证明: 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle A = \angle C = 90^\circ \\ AE = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (\text{SAS})$,

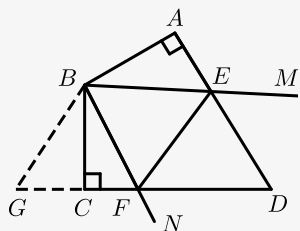
$\therefore BE = BF$,

又 $\because \angle MBN = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BEF$ 是等边三角形.

(2) $EF = AE + CF$.

如图, 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 120° ,



$\because AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore A$ 点与 C 点重合,

$\therefore BG = BE$, $FG = CG + CF = AE + CF$,

$\because \angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle ABE = \angle CBG$,

$$\therefore \angle GBF = 60^\circ ,$$

在 $\triangle GBF$ 和 $\triangle EBF$ 中 ,

$$\begin{cases} BG = BE \\ \angle GBF = \angle EBF = 60^\circ , \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GBF \cong \triangle EBF \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore GF = EF ,$$

$$\therefore EF = AE + CF .$$

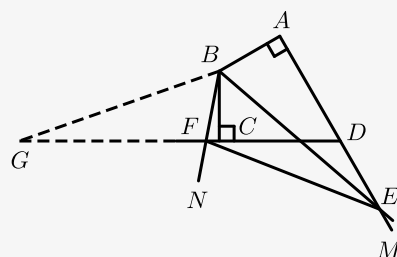
$$(3) EF = AE - CF .$$

理由 : 如图 , 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 120° ,

$$\therefore AB = BC , \angle ABC = 120^\circ ,$$

$$\therefore A \text{ 点与 } C \text{ 点重合} , \angle ABE = \angle CBG ,$$

$$\therefore BG = BE , FG = CG - CF = AE - CF ,$$



$$\therefore \angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBG + \angle CBE = \angle GBE = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle MBN = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle GBF = 60^\circ ,$$

在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle BFE$ 中 ,

$$\begin{cases} BG = BE \\ \angle GBF = \angle EBF = 60^\circ , \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFG \cong \triangle BFE \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore GF = EF ,$$

$$\therefore EF = AE - CF .$$

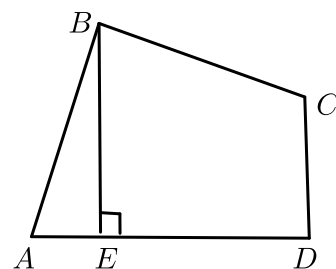
【标注】【知识点】半角模型

二、 对角互补模型

练习4

14. 2018~2019学年福建龙岩新罗区龙岩市第五中学初二下学期期中第23题10分 ★★★

在四边形 $ABCD$ 中 , $AB = BC$, $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, $BE \perp AD$ 于 E , 四边形 $ABCD$ 的面积为 8 , 求 BE 的长 .



【答案】 $2\sqrt{2}$.

【解析】 根据 $AB = BC$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ 将 $\triangle ABE$ 绕点 B 逆时针方向旋转 90° ,

如图 ,

$\because \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$,

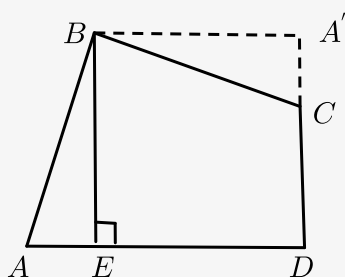
$\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore A'、C、D$ 共线 ,

又 $\because BE \perp AD$, $BE = BA'$,

$\therefore$ 四边形 $A'BED$ 为正方形 , 且面积为 8 ,

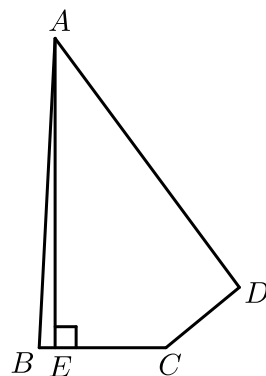
$\therefore BE = 2\sqrt{2}$.



【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

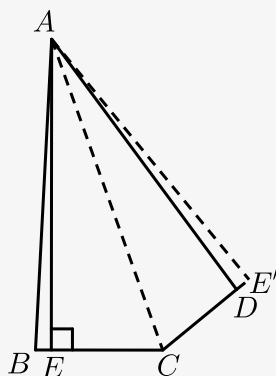
15. 2019年陕西西安碑林区西安交通大学附属中学初三中考二模试卷及解析第14题3分 ★★★

如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $AB = AD$, $AE \perp BC$ 于点 E . 若 $AE = 17$, $BC = 8$, $CD = 6$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ .



【答案】 119

【解析】将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转使 AB 与 AD 重合，得 $\triangle ADE'$ ，



$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$\therefore C, D, E'$ 三点共线.

即 $EA = E'A$, $AC = AC$ 得 $\text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle AE'C$.

$$\therefore EC = BC - BE = E'C = CD + DE',$$

$$8 - BE = 6 + BE, \text{ 得 } BE = 1.$$

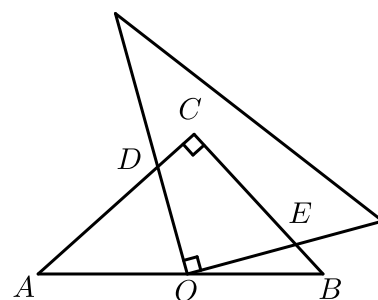
$$\therefore EC = 7.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\triangle AEC} = 2 \times \frac{7 \times 17}{2} = 119.$$

【标注】【知识点】对角互补模型；HL

16. 2020~2021学年山东济南天桥区初二上学期期中第12题4分 ★★★

如图，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 O 是 AB 的中点，且 $AB = \sqrt{6}$ ，将一块直角三角板的直角顶点放在点 O 处，始终保持该直角三角板的两直角边分别与 AC 、 BC 相交，交点分别为 D 、 E ，则 $CD + CE = ()$.



A. $\sqrt{2}$

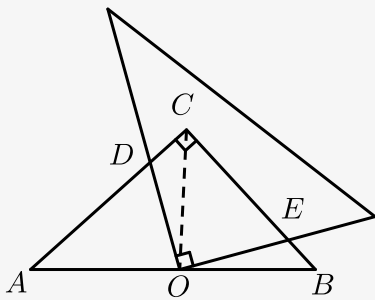
B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】连接 OC ，

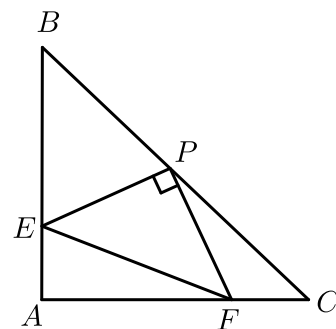


$\therefore$ 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{6}$,
 $\therefore \angle B = 45^\circ$,
 $\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$,
 $\therefore BC = \sqrt{6} \times \cos 45^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$,
 $\therefore$ 点 O 是 AB 的中点,
 $\therefore OC = \frac{1}{2}AB = OB$, $OC \perp AB$,
 $\therefore \angle COB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DOC + \angle COE = 90^\circ$, $\angle COE + \angle EOB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DOC = \angle EOB$,
 同理得 $\angle ACO = \angle B$,
 $\therefore \triangle ODC \cong \triangle OEB$,
 $\therefore DC = BE$,
 $\therefore CD + CE = BE + CE = BC = \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】对角互补模型

17. 2020~2021学年10月广东深圳龙华区民治中学初二上学期月考第12题3分 ★★

如图：已知 $\triangle ABC$, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点, 两边 PE , PF 分别交 AB , AC 与 E , F , 给出以下五个结论：① $CF = AE$ ；② $2PF^2 = EF^2$ ；③ $\angle AEP + \angle AFP = 180^\circ$ ；④ $EF = CP$ ；⑤ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 上述结论中始终正确的有 () .



A. ①②③④⑤

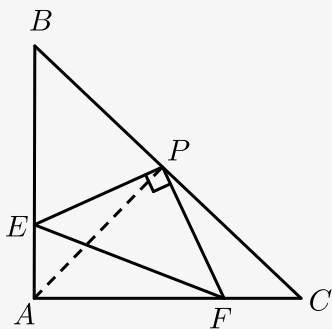
B. ①③④⑤

C. ①②④⑤

D. ①②③⑤

【答案】D

【解析】如图，连接 AP .



$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ, PB = PC,$$

$$\therefore PA = PB = PC, AP \perp BC,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPA = \angle FPC,$$

在 $\triangle EPA$ 和 $\triangle FPC$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAP = \angle C \\ AP = PC \\ \angle EPA = \angle FPC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EPA \cong \triangle FPC,$$

$$\therefore AE = CF, PE = PF, \text{故①正确};$$

$$S_{\triangle EPA} = S_{\triangle FPC},$$

$$\therefore \triangle PEF \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore EF = \sqrt{2}PF,$$

$$\therefore EF^2 = 2PF^2, \text{故②正确};$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AEPF} = S_{\triangle PAE} + S_{\triangle PAF} = S_{\triangle PFC} + S_{\triangle PAF} = S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, \text{故⑤正确};$$

$$\therefore \angle EAF + \angle EPF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP + \angle AFP = 360^\circ - (\angle EAF + \angle EPF) = 180^\circ, \text{故③正确};$$

$$\therefore \angle EPF \text{ 绕点 } P \text{ 旋转过程中, } PE \text{ 的长度是变化的},$$

$$\therefore EF \text{ 的长度的变化的, 而 } PC \text{ 是不变的, 故④错误}.$$

故选 D .

【标注】【知识点】对角互补模型

18. 2019~2020学年9月湖南长沙天心区长郡中学初三上学期月考 (长郡教育集团) 第12题3分 ★★★

如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 作射线 OM 、 ON 分别交 AB 、 BC 于点 E 、 F ，且 $\angle EOF = 90^\circ$ ， BO 、 EF 交于点 P ，则下列结论中：

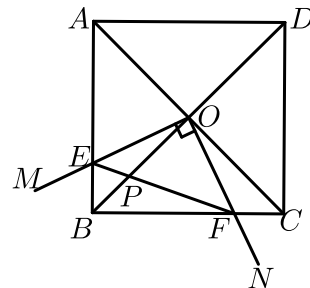
① $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形；

② 图形中全等的三角形只有两对；

③ $BE + BF = \sqrt{2}OA$;

④ 正方形 $ABCD$ 的面积等于四边形 $OEBF$ 面积的 4 倍 ,

正确的结论有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\angle BAO = \angle ABO = \angle OBC = 45^\circ, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle COF,$$

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle COF \\ OB = OC \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases},$$

$$\triangle BOE \cong \triangle COF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore OE = OF, BE = CF,$$

$\therefore \triangle EOF$ 是等腰三角形 , 故①正确 ,

$$\therefore BE + BF = CF + BF = BC = \sqrt{2}OA, \text{ 故③正确 ,}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle BOF}$$

$$= S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COF}$$

$$= S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = 4S_{\text{四边形}OEBF}, \text{ 故④正确 ,}$$

图中全等三角形有 $\triangle BOE \cong \triangle COF$, $\triangle AOB \cong \triangle AOD \cong \triangle DOC \cong \triangle BOC$,

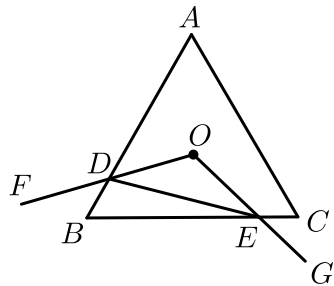
故②错误 ,

综上 , 正确的结论有 3 个 ,

故选 C .

19. 2018~2019学年山东泰安泰山区初二上学期期末（五四制）第14题3分 ★★★

如图，等边三角形 ABC 的边长为 4，点 O 是 $\triangle ABC$ 的三边垂直平分线的交点， $\angle FOG = 120^\circ$ ，绕点 O 旋转 $\angle FOG$ ，分别交线段 AB 、 BC 于 D 、 E 两点，连接 DE ，给出下列四个结论：① $OD = OE$ ；② $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle BDE}$ ；③ 线段 DE 的长始终等于 2；④ 四边形 $ODBE$ 的面积始终等于 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ 。上述结论中正确的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】连接 OB 、 OC ，如图，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心，

$\therefore OB = OC$ ， OB 、 OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle ABO = \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 120^\circ$ ，即

$\angle BOE + \angle COE = 120^\circ$ ，

而 $\angle DOE = 120^\circ$ ，即 $\angle BOE + \angle BOD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = \angle COE$ ，且 $BO = CO$ ， $\angle OBD = \angle OCE$ ，

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE (ASA)$ ，

$\therefore BD = CE$ ， $OD = OE$ ，所以①正确；

$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE}$ ，

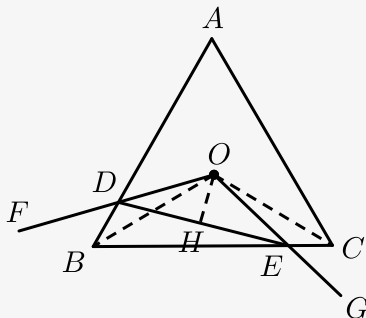
$\therefore$ 四边形 $ODBE$ 的面积 $= S_{\triangle OBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，

所以④正确；

作 $OH \perp DE$ ，如图，则 $DH = EH$ ，

$\therefore \angle DOE = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ODE = \angle OEH = 30^\circ$ ，



$$\therefore OH = \frac{1}{2}OE, HE = \sqrt{3}OH = \frac{\sqrt{3}}{2}OE,$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}OE,$$

$$\therefore S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot \sqrt{3}OE = \frac{\sqrt{3}}{4}OE^2,$$

即 $S_{\triangle ODE}$ 随 OE 的变化而变化,

而四边形 $ODBE$ 的面积为定值,

$\therefore S_{\triangle ODE} \neq S_{\triangle BDE}$, 所以②错误;

$$\therefore DE = \sqrt{3}OE,$$

$\therefore$ 随着 OE 的变化, DE 的长度也发生变化,

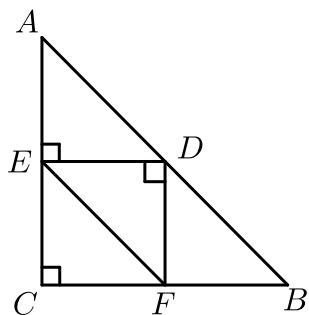
故③错误.

故选: B.

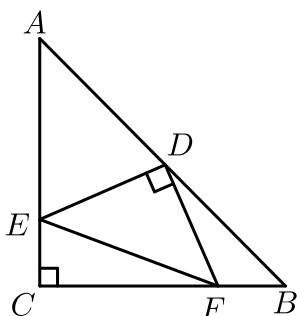
【标注】【知识点】对角互补模型

20. 初三上学期单元测试《图形的旋转》第17题 ★★★

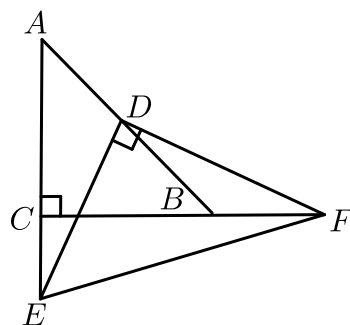
已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 为 AB 边中点, $\angle EDF = 90^\circ$, $\angle EDF$ 绕点 D 旋转, 它的两边分别交 AC , CB (或它们的延长线) 于点 E , F , 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 $DE \perp AC$ 于点 E 时 (如图所示), 易证 $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 DE 和 AC 不垂直时, 在图②和图③这两种情况下, 上述结论是否还成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, $S_{\triangle DEF}$, $S_{\triangle CEF}$, $S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 不需证明.



图①



图②

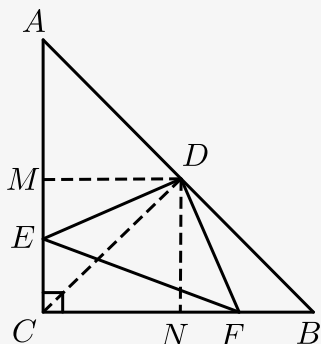


图③

【答案】 证明见解析.

【解析】 (1) 在图②中, $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 这一结论仍然成立, 理由如下:

过点 D 作 $DM \perp AC$ 于点 M , $DN \perp BC$ 于点 N , 连接 CD ,



图②

$$\therefore \angle DME = \angle DNF = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle MDN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle MDE + \angle EDN = \angle EDN + \angle NDF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle MDE = \angle NDF ,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 中 } , \angle ACB = 90^\circ , \text{ 点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点 } , AC = BC ,$$

$$\therefore CD = AD = BD , \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ ,$$

$$\because DM \perp AC \text{ 于点 } M , DN \perp BC \text{ 于点 } N ,$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2}AC , DN = \frac{1}{2}BC ,$$

$$\therefore DM = DN ,$$

$$\therefore \triangle DME \cong \triangle DNF ,$$

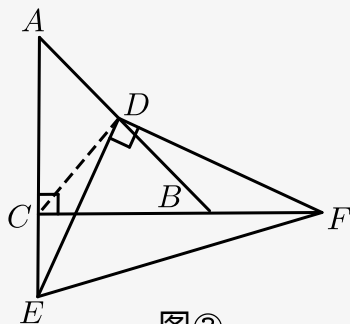
$$\therefore S_{\text{四边形}DMCN} = S_{\text{四边形}DECF} = S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} ,$$

$$\because \text{由①中结论可知 } , S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} .$$

$\therefore$ 在图②中, ①中结论仍然成立;

(2)在图③中, ①中结论不在成立, 此时 $S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 理由如下:

如图③, 连接 CD ,



图③

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中 } , \angle ACB = 90^\circ , \text{ 点 } D \text{ 为 } AB \text{ 中点 } , AC = BC ,$$

$$\therefore CB = BD , \angle CDB = 90^\circ , \angle ACD = \angle ABC = 45^\circ ,$$

$$\because \angle EDF = 90^\circ ,$$

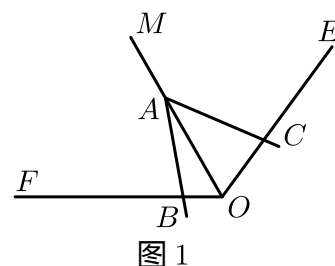
$$\therefore \angle CDE + \angle EDB = \angle EDB + \angle BDF ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle CDE = \angle BDF, \\
&\therefore \triangle DCE \cong \triangle DBF, \\
&\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DBF} + S_{\text{四边形}DBFE} \\
&= S_{\triangle DEC} + S_{\text{四边形}DBFE} \\
&= S_{\text{五边形}DBFEC} \\
&= S_{\triangle CEF} + S_{\triangle DBC} \\
&= S_{\triangle CEF} + \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \\
&\therefore S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, \\
&\therefore \text{图③中, ①中的结论不在成立, 新的结论是: } S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】对角互补模型

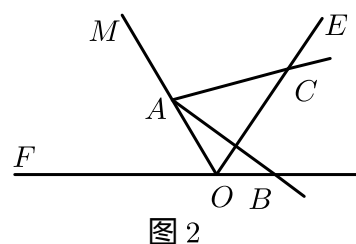
21. 2020~2021学年12月重庆北碚区重庆市西南大学附属中学初二上学期周测B卷第26题10分 ★★★

如图1, 已知 $\angle EOF = 120^\circ$, OM 平分 $\angle EOF$, A 是 OM 上一点, $\angle BAC = 60^\circ$, 且与 OF 、 OE 分别交于点 B 、 C .

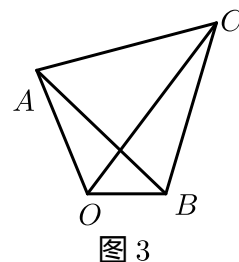


(1) 求证: $AB = AC$.

(2) 如图2, 在(1)中, 当 $\angle BAC$ 绕点 A 逆时针旋转使得点 B 落在 OF 的反向延长线上时, (1) 中的结论是否还成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 说明理由.



(3) 如图3, 已知 $\angle AOC = \angle BOC = \angle BAC = 60^\circ$, 求证: $OC = OA + OB$.



【答案】(1) 证明见解析.

(2) 成立, 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】(1) 过 A 作 $AG \perp OF$ 于 G , $AH \perp OE$ 于 H ,

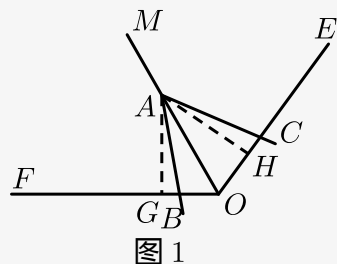


图 1

则 $\angle AHO = \angle AGO = 90^\circ$,

$\because \angle EOF = 120^\circ$,

$\therefore \angle HAG = 60^\circ = \angle BAC$,

$\therefore \angle HAG - \angle BAH = \angle BAC - \angle BAH$,

$\therefore \angle BAG = \angle CAH$,

$\because OM$ 平分 $\angle EOF$, $AG \perp OF$, $AH \perp OE$,

$\therefore AG = AH$,

在 $\triangle BAG$ 和 $\triangle CAH$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle AGB = \angle AHC \\ AG = AH \\ \angle BAG = \angle CAH \end{cases},$$

$\therefore \triangle BAG \cong \triangle CAH (ASA)$,

$\therefore AB = AC$.

(2) 结论还成立,

过 A 作 $AG \perp OF$ 于 G , $AH \perp OE$ 于 H ,

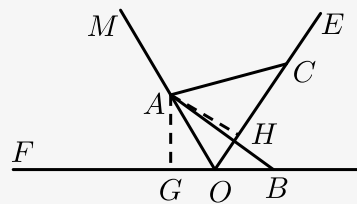


图 2

与 (1) 证法类似, 根据 ASA 证 $\triangle BAG \cong \triangle CAH$,

则 $AB = AC$.

(3) 如图, $\angle FOA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

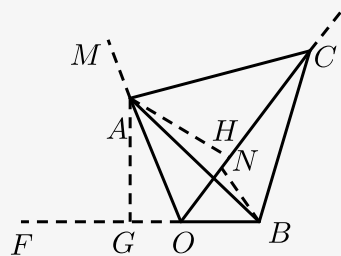


图 3

$$\angle FOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ ,$$

即 OM 平分 $\angle COF$,

过 A 作 $AG \perp OF$ 于 G , $AH \perp OC$ 于 H .

由 (2) 知 : $AC = AB$,

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 .

在 OC 上截取 $ON = BO$, 连接 BN ,

$$\therefore \angle COB = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle BON$ 是等边三角形 ,

$$\therefore BN = OB , \angle OBN = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ = \angle NBO ,$$

$$\therefore \angle NBO - \angle ABN = \angle ABC - \angle ABN ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle CBN .$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle CNB$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABO = \angle CBN , \\ BO = BN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle CNB (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore NC = OA ,$$

$$\therefore OC = ON + CN = OB + OA ,$$

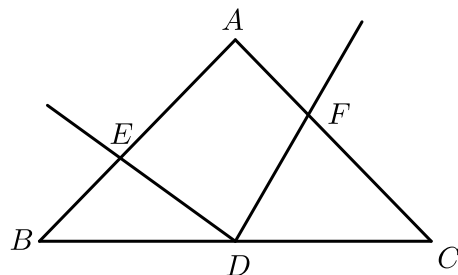
$$\text{即 } OC = OA + OB .$$

【标注】【知识点】对角互补模型

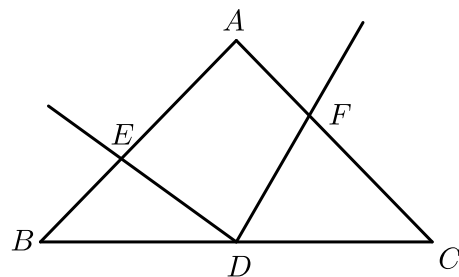
22. ★★★★★

如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , 点 D 为 BC 边的中点 , 以点 D 为顶点的 $\angle EDF$ 的两边分别与边 AB , AC 交于点 E , F , 且 $\angle EDF$ 与 $\angle A$ 互补 .

(1) 如图 , 若 $AB = AC$, 且 $\angle A = 90^\circ$, 则线段 DE 与 DF 有何数量关系 ? 请直接写出结论 .



(2) 如图 , 若 $AB = AC$, 那么 (1) 中的结论是否还成立 ? 若成立 , 请给出证明 ; 若不成立 , 请说明理由 .



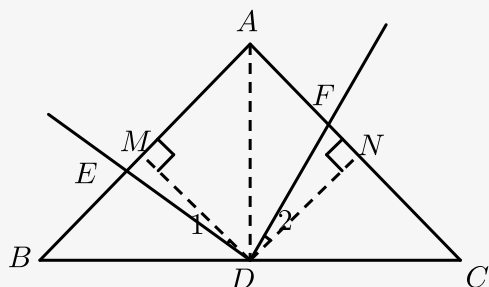
【答案】 (1) 结论： $DE = DF$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 结论： $DE = DF$.

(2) $DE = DF$ 依然成立 .

过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 连接 AD ,



则 $\angle EMD = \angle FND = 90^\circ$,

$\because AB = AC$, 点 D 为 BC 中点 ,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore DM = DN$,

$\because$ 在四边形 $AMDN$ 中 , $\angle DMA = \angle DNA = 90^\circ$,

$\therefore \angle MAN + \angle MDN = 180^\circ$,

又 $\because \angle EDF$ 与 $\angle MAN$ 互补 ,

$\therefore \angle MDN = \angle EDF$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \triangle DEM \cong \triangle DFN$ (ASA) ,

$\therefore DE = DF$.

【标注】 【知识点】 ASA

【知识点】 等腰三角形的性质-三线合一

【知识点】 等腰直角三角形的性质

【能力】 运算能力

【思想】 数形结合思想

